ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1987
**MATHEMATIQUES II**
(3 pages dactylographiées)

# TA

L'espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère direct orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ noté $R_0$. On note $O_1$ et $O_2$ les points définis par

$$\overrightarrow{OO_1} = \vec{i} \qquad \overrightarrow{OO_2} = \vec{k}$$

On appellera $R_1$ et $R_2$ respectivement les repères $(O_1 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O_2 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A tout point M de l'espace on associera ses coordonnées $(x, y, z)$ dans $R_0$, $(x_1, y, z)$ dans $R_1$, $(x, y, z_2)$ dans $R_2$. Le temps t décrit l'ensemble des réels.

On pose $\vec{u}(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j}$ et $\vec{v}(t) = \vec{u}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.

*Il est demandé d'illustrer par des figures les situations géométriques rencontrées.*
*La seconde partie est dans une large mesure indépendante de la première.*

## PREMIERE PARTIE : Etude d'une surface

*Dans cette partie l'espace est rapporté à $R_0$.*

I.1. Soit le point mobile L(t) tel que, pour tout t, $\overrightarrow{OL}(t) = \vec{k} + \vec{u}(t)$. Décrire le mouvement de L ; quelle est sa trajectoire ?

I.2. Soit la fonction vectorielle $\vec{\delta}(t)$ définie, pour toute valeur de t, par $\vec{\delta}(t) = \sin t\, \vec{v}(t) + \cos t\, \vec{k}$. On désigne par $\Delta_t$ la droite passant par L(t) et dirigée par le vecteur $\vec{\delta}(t)$.

a) Montrer que $\Delta_t$ peut être définie (dans $R_0$) par les équations

$$\begin{cases} x\cos t + y \sin t - 1 = 0 \\ y - z \sin t = 0 \end{cases}$$

b) Montrer que $\Delta_t$ est, quel que soit t, tangente au cylindre de révolution $\mathcal{C}$ d'axe $(O ; \vec{k})$ et de rayon égal à 1, en un point de $\mathcal{C}$ situé dans le plan d'équation $z - 1 = 0$ (on considère qu'une droite D génératrice de $\mathcal{C}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en tout point de D).

c) Montrer que $\Delta_t$ et l'axe $(O ; \vec{i})$ sont, pour tout t, situés dans un même plan. Donner une équation de ce plan.

d) Est-ce que toute droite vérifiant les propriétés vues en b) et c) appartient à la famille des droites $\Delta_t$ ?

I.3.a) Discuter l'existence des points $P_t$ et $Q_t$ situés sur $\Delta_t$ et, respectivement, sur la droite $(O ; \vec{i})$ et dans le plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

b) Déterminer la longueur minimum du segment $[P_t Q_t]$ et les valeurs de t correspondantes.

c) Quels sont les lieux respectifs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de $P_t$ et $Q_t$ quand t varie ?

d) Faire un croquis en perspective représentant les axes de coordonnées, la portion de $\mathcal{C}$ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z - 1 = 0$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et, pour une valeur de t appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$, le segment $[P_t Q_t]$ et sa projection orthogonale sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

.../...

TOURNER LA PAGE

I.4. Montrer que la surface S engendrée par les droites $\Delta_t$, quand t décrit $\mathbb{R}$, est contenue dans la surface S' d'équation cartésienne (dans $R_0$) :

$$x^2(y^2 - z^2) + (z - y^2)^2 = 0$$

Quels sont les points de S' n'appartenant pas à S ?

I.5. Discuter, suivant les valeurs de $\lambda$, l'allure de la section de S par les plans d'équation $z - \lambda = 0$.

On tracera avec soin, sur trois graphiques distincts, les projections orthogonales des sections correspondant à

$$\lambda = \frac{1}{3}\ , \quad \lambda = \frac{2}{3}\ , \quad \lambda = 2\ , \qquad \text{sur le plan } (O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}).$$

## DEUXIEME PARTIE : Etude d'une courbe

*Dans cette partie on rapporte l'espace au repère $R_1$.*

On considère la courbe $\Gamma$ lieu du point $M_t$ tel que

$$\overrightarrow{O_1M_t} = (\vec{k} + \vec{u}(t))\ (1 - \cos t)$$

II.1. Préciser la nature du cône engendré, quand t varie, par la droite $(O_1\ ;\ \vec{k} + \vec{u}(t))$. En donner une équation.

II.2. Construire les projections orthogonales de $\Gamma$ sur les trois plans de coordonnées. Quelle est la nature de la projection orthogonale sur le plan $(O_1\ ;\ \vec{i},\ \vec{k})$ ?

II.3 Calculer la longueur totale de $\Gamma$ et en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

II.4. On considère les quadriques d'équation

$$(x_1^2 + y^2 - z^2) + 2\lambda\ (x_1 - z + z^2) = 0$$

Montrer que toutes ces quadriques contiennent $\Gamma$ et sont toutes de révolution ; préciser l'axe de révolution. Discuter suivant $\lambda$ la nature de ces quadriques.

II.5. Montrer qu'il existe une sphère et une seule contenant $\Gamma$. Donner une équation de cette sphère ; préciser son centre et son rayon.

## TROISIEME PARTIE : Interprétation cinématique

*L'espace est maintenant rapporté à $R_2$.*

III.1.a) Déterminer les fonctions vectorielles $t \mapsto \vec{W}(t)$, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout réel t, on ait :

$$\vec{W}'(t) = (\vec{k} - \vec{u}(t)) \wedge \vec{W}(t)$$

(On pourra chercher $\vec{W}(t)$ sous la forme $\alpha(t)\ \vec{u}(t) + \beta(t)\ \vec{v}(t) + \gamma(t)\ \vec{k}$).

b) Etablir qu'il existe une base orthonormale mobile $(\vec{I}(t),\ \vec{J}(t),\ \vec{K}(t))$ unique vérifiant les conditions suivantes :

i) les fonctions $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$

ii) $\vec{I}(0) = \vec{i}$, $\vec{J}(0) = \vec{j}$, $\vec{K}(0) = \vec{k}$

iii) le vecteur rotation de cette base mobile $(\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$ est, à tout instant t, $\vec{\Omega}(t) = \vec{k} - \vec{u}(t)$



Etablir que l'on a, pour tout t :

$\vec{I}(t) = \vec{u}(t)$, $\vec{J}(t) = \cos t\ \vec{v}(t) - \sin t\ \vec{k}$, $\vec{K}(t) = \sin t\ \vec{v}(t) + \cos t\ \vec{k}$

III.2. On considère le point mobile M(t) lié au repère $(O_2\ ;\ \overrightarrow{I(t)},\ \overrightarrow{J(t)},\ \overrightarrow{K(t)})$ qui, à l'instant zéro, coïncide avec $O_1$. Etudier son mouvement par rapport au repère mobile $(O_2\ ;\ \vec{u}(t),\ \vec{v}(t),\ \vec{k})$ ; soit $\Upsilon$ sa trajectoire dans ce repère.

Quelle est la surface engendrée par $\Upsilon$ dans $R_0$ lorsque t varie ?

Comparer le point M(t) au point $M_t$ défini dans la partie II.

III.3. Former une équation, dans le repère $(O_2\ ;\ \vec{u}(t),\ \vec{v}(t),\ \vec{k})$, du plan médiateur du segment $[O_1\ M(t)]$.

Quelle est la courbe $\sigma$-symétrique de $\Upsilon$ par rapport à ce plan ?

Faire une figure représentant $R_0$, $\sigma$, $\Upsilon$, les points M(t) et $O_1$, la droite $\Delta_t$ et sa projection orthogonale sur le plan $(O_2\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

En déduire une définition cinématique de $\Gamma$ et S.

****
***
*